II. NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales son todos aquellos números de la forma $\frac{a}{b}$ con **a** y **b** **números enteros** y **b** distinto de cero. El conjunto de los números racionales se representa por la letra Q.

$$Q = \left\{\frac{a}{b} \,/\, a, b \in Z \text{ y } b \neq 0\right\}$$

2. IGUALDAD ENTRE NÚMEROS RACIONALES

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$. Entonces, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$, entonces:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

OBSERVACIONES

1. El inverso aditivo (u opuesto) de $\frac{a}{b}$ es $-\frac{a}{b}$, el cual se puede escribir también como $\frac{-a}{b}$ o $\frac{a}{-b}$

2. El número mixto $A\frac{b}{c}$ se transforma a fracción con la siguiente fórmula:

$$A\frac{b}{c} = \frac{A \times c + b}{c}$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$, entonces:

MULTIPLICACIÓN

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

DIVISIÓN

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \; c \neq 0$$

OBSERVACIÓN

El inverso multiplicativo (o recíproco) de $\frac{a}{b}$ es $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, con $a \neq 0$

RELACIÓN DE ORDEN EN Q

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $b, d \in \mathbb{Z}^+$. Entonces: $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \geq bc$

OBSERVACIONES

1. Para comparar números racionales, también se pueden utilizar los siguientes procedimientos:

a. igualar numeradores.
b. igualar denominadores.
c. convertir a número decimal.

2. Entre dos números racionales cualesquiera hay **infinitos** números racionales.

NÚMEROS DECIMALES

Al efectuar la división entre el numerador y el denominador de una fracción, se obtiene un desarrollo decimal, el cuál puede ser finito, infinito periódico o infinito semiperiódico.

a. Desarrollo decimal finito: Son aquellos que tienen una cantidad limitada de cifras decimales.
Ejemplo: 0,425 tiene 3 cifras decimales

b. Desarrollo decimal infinito periódico: Son aquellos que están formados por la parte entera y el período.
Ejemplo: 0,444.... = $0,\overline{4}$

c. Desarrollo decimal infinito semiperiódico: Son aquellos que están formados por la parte entera, un anteperíodo y el período.
Ejemplo: 24,42323... = $24,4\overline{23}$

OPERATORIA CON NÚMEROS DECIMALES

1. Adición o sustracción de números decimales: Para sumar o restar números decimales se ubican las cantidades enteras bajo las enteras, las comas bajo las comas, la parte decimal bajo la decimal y a continuación se realiza la operatoria respectiva.

Así por ejemplo:
```
   0,19
   3,81
+ 22,2
  26,20
```

2. Multiplicación de números decimales: Para multiplicar dos o más números decimales, se multiplican como si fueran números enteros, ubicando la coma en el resultado final, de derecha a izquierda, tantos lugares decimales como decimales tengan los números en conjunto.

Así por ejemplo: 3,21 · 2,3
```
  963
 642
 7,383
```

3. División de números decimales: Para dividir números decimales, se puede transformar el dividendo y el divisor en números enteros amplificando por una potencia en base 10.

Así por ejemplo: 2,24: 1,2 se amplifica por 100

224: 120 y se dividen como números enteros

TRANSFORMACIÓN DE DECIMAL A FRACCIÓN

1. Decimal finito: Se escribe en el numerador todos los dígitos que forman el número decimal y en el denominador una potencia de 10 con tantos ceros como cifras decimales tenga dicho número.

Por ejemplo: $3{,}24 = \frac{324}{100}$

2. Decimal infinito periódico: Se escribe en el numerador la diferencia entre el número decimal completo (sin considerar la coma) y el número formado por todas las cifras que anteceden al período y en el denominador tantos nueves como cifras tenga el período.

Por ejemplo: $2{,}\overline{15} = \frac{215-2}{99}$

3. Decimal infinito semiperiódico: Se escribe en el numerador la diferencia entre el número completo (sin considerar la coma) y el número formado por todas las cifras que anteceden al período y en el denominador se escriben tantos nueves como cifras tenga el período, seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

Por ejemplo: $5{,}3\overline{4} = \frac{534-53}{90}$

APROXIMACIONES

Frecuentemente conviene **redondear** o **truncar** un número, dejando una **aproximación** con menos cifras significativas, de las que tiene originalmente.

REDONDEO

Para **redondear** un número decimal finito o infinito se agrega 1 al último dígito que se conserva (redondeo por **exceso**), si el primero de los dígitos eliminados es mayor o igual a 5; si la primera cifra a eliminar es menor que 5, el último dígito que se conserva se mantiene (redondeo por **defecto**). Por lo tanto, como ejemplos, **BAJO ESTA REGLA,** al redondear a la centésima los números 4,748 y 9,5237 se obtiene 4,75 y 9,52, respectivamente.

TRUNCAMIENTO

Para **truncar** un número decimal, se consideran como ceros las cifras ubicadas a la derecha dela última cifra a considerar.

De esta manera, como ejemplo, si se trunca a las centésimas el número 2,5698 resulta 2,56.

ESTIMACIONES

Realizar un cálculo estimativo, consiste en efectuarlo con cantidades aproximadas por redondeo a las dadas, reemplazando dígitos distintos de ceros por ceros, dejando la cantidad de cifras significativas que se indique (lo que habitualmente es una cifra).

EJEMPLO PSU-1: $5 \bullet \left(\frac{0,05}{0,5}\right)$

A) 0,5
B) 0,05
C) 0,005
D) 50
E) 500

EJEMPLO PSU-2: El orden de los números $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{6}$ y $c = \frac{3}{8}$ de menor a mayor es

A) a < b < c
B) b < c < a
C) b < a < c
D) c < a < b
E) c < b < a

EJEMPLO PSU-3: 40 - 20 • 2,5 + 10 =

A) 0
B) -20
C) 60
D) 75
E) 250

EJEMPLO PSU-4: $\frac{9}{8} - \frac{3}{5} =$

A) 0,15
B) 0,5
C) 0,52
D) 0,525
E) 2

EJEMPLO PSU-5: Si a $\frac{5}{6}$ se le resta $\frac{1}{3}$ resulta:

A) $-\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{4}{3}$

E) $\frac{2}{9}$

EJEMPLO PSU-6: $\dfrac{1}{\frac{3}{8} - 0{,}75} + \dfrac{1}{\frac{3}{8} - 0{,}25}$

A) $\frac{15}{3}$

B) $\frac{16}{3}$

C) $-\frac{16}{3}$

D) 4

E) $\frac{8}{3}$

EJEMPLO PSU-7: Si t = 0,9 y r = 0,01, entonces $\frac{t - r}{r} =$

A) 0,89
B) 0,9
C) 8,9
D) 89
E) Ninguno de los valores anteriores

EJEMPLO PSU-8: En la igualdad $\frac{1}{P} = \frac{1}{Q} - \frac{1}{R}$, si P y R se reducen a la mitad, entonces para que se mantenga el equilibrio, el valor de **Q** se debe

A) duplicar.
B) reducir a la mitad.
C) mantener igual.
D) cuadruplicar.
E) reducir a la cuarta parte.

EJEMPLO PSU-9: Juan dispone de $ 6.000 para gastar en entretención. Si se sabe que cobran $1.000 por jugar media hora de pool y $600 por media hora en Internet, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) Juan puede jugar a lo más 3 horas de pool
II) Juan puede conectarse a lo más 5 horas en Internet
III) Juan puede jugar 1,5 horas de pool y conectarse 2,5 horas a internet

A) Solo III
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

EJEMPLO PSU-10: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} =$

A) 3
B) $\frac{1}{x^3}$
C) $\frac{3}{x}$
D) $\frac{1}{3x}$
E) $\frac{3}{x^3}$

EJEMPLO PSU-11: Si $P = \frac{1}{2}RH$, entonces H^{-1} es igual a:

A) $\frac{2P}{R}$

B) $-\frac{R}{2P}$

C) $-\frac{2P}{R}$

D) $\frac{2R}{P}$

E) $\frac{R}{2P}$

EJEMPLO PSU-12: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} =$

A) $\frac{5}{12}$

B) $\frac{2}{15}$

C) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{4}$

EJEMPLO PSU-13: $\frac{2{,}6 - 2 \cdot 3{,}8}{2{,}6 \cdot 6 + 3{,}8} =$

A) $-\frac{1}{3}$

B) $-\frac{5}{19{,}4}$

C) $\frac{5}{19{,}4}$

D) $\frac{2{,}28}{19{,}4}$

E) $\frac{7{,}6}{9{,}8}$

EJEMPLO PSU-14: $\frac{1}{3} + \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} =$

A) $\frac{3}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{11}{6}$

D) 1

E) 3

EJEMPLO PSU-15: $\frac{\frac{50}{100} + 0{,}5}{(0{,}5) \cdot 2} =$

A) 10
B) 1
C) 0,1
D) 0,25
E) 0,75

EJEMPLO PSU-16: Una persona debe recorrer 12,3 kilómetros y ha caminado 7.850 metros. ¿Cuánto le falta por recorrer?

A) 4,45 km
B) 4,55 km
C) 5,55 km
D) 5,45 km
E) 6,62 km

EJEMPLO PSU-17: Si a es un número natural mayor que 1, ¿cuál es la relación correcta entre las fracciones: $p = \frac{3}{a}$ $t = \frac{3}{a-1}$ $r = \frac{3}{a+1}$

A) $p < t < r$
B) $r < p < t$
C) $t < r < p$
D) $r < t < p$
E) $p < r < t$

EJEMPLO PSU-18: Se mezclan 2 litros de un licor P con 3 litros de un licor Q. Si 6 litros del licor P valen \$ a y 9 litros del licor Q valen \$ b, ¿cuál es el precio de los 5 litros de mezcla?

A) $\$\dfrac{a+b}{3}$

B) $\$\dfrac{a+b}{5}$

C) $\$(2a+3b)$

D) $\$\dfrac{3a+2b}{18}$

E) $\$\dfrac{5\cdot(3a+2b)}{18}$

EJEMPLO PSU-19: Juan tiene un bidón de 5 litros de capacidad, llenado hasta los $2\frac{1}{3}$ litros. ¿Cuántos litros le faltan para llenarlo?

A) $2\frac{1}{3}$

B) $2\frac{2}{3}$

C) $2\frac{3}{2}$

D) $3\frac{1}{3}$

E) $1\frac{2}{3}$

EJEMPLO PSU-20: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\bullet\frac{2}{3}=$

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{12}$

E) $\frac{4}{21}$

EJEMPLO PSU-21: Se define $a * b = \frac{1}{ab}$, entonces $a * (b * c)$ es igual a:

A) $\frac{1}{abc}$

B) $\frac{a}{bc}$

C) $\frac{bc}{a}$

D) $\frac{ab}{c}$

E) $\frac{c}{ab}$

EJEMPLO PSU-22: Sean a, b, c y d números enteros distintos entre sí y distintos de cero. Si $P = \frac{a}{b} + d$ y $Q = \frac{a}{c} + d$, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $P - Q \neq 0$

II) $\frac{P}{Q} = \frac{c}{b}$

III) $P \cdot Q = \frac{a^2}{bc} + d^2$

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y III
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas.

EJEMPLO PSU-23: $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+1}}} =$

A) $\frac{5}{2}$

B) $\frac{2}{5}$

C) 1

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{1}{2}$

EJEMPLO PSU-24: tres atletas corrieron los 100 metros planos, Javier cronometró 11,3 segundos, Arturo 11,02 segundo y Marcelo 11,2 segundos. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) Javier llegó después de Marcelo
II) Entre Arturo y Marcelo hay 18 centésimas de segundo de diferencia al llegar a la meta
III) Arturo llegó primero

A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

EJEMPLO PSU-25: En una receta de un postre para 6 personas se necesitan 200 gramos de azúcar. Si se desea preparar dicho postre para **n** personas, ¿por cuál número se debe multiplicar **n** para obtener cuántos gramos de azúcar se necesitan?

A) $33,\overline{3}$
B) 200
C) 1.200
D) 6
E) 0,03

EJEMPLO PSU-26: Sean a, b y d números enteros positivos. Si $S = \frac{a}{b} + \frac{a}{d}$, entonces S^{-1}es:

A) $\frac{bd}{2a}$
B) $\frac{ad + ab}{bd}$
C) $\frac{b + d}{a}$
D) $\frac{b + d}{2a}$
E) $\frac{bd}{a(b + d)}$

EJEMPLO PSU-27: $(0,2)^{-2} =$

A) 5
B) 10
C) 25
D) $\frac{1}{25}$
E) $\frac{1}{5}$

EJEMPLO PSU-28. $3 - \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{3}\right) =$

A) $\frac{58}{21}$
B) $\frac{68}{21}$
C) $\frac{5}{21}$
D) $-\frac{5}{21}$
E) Ninguna de las anteriores

EJEMPLO PSU-29. Se tienen dos cajas: una con seis botellas de $\frac{3}{4}$ de litro, todas llenas y otra con cuatro botellas de $1\frac{1}{4}$ de litro, todas llenas también. ¿Cuál es el número de botellas de medio litro con las que se puede envasar todo el líquido?

A) 5
B) 9
C) 10
D) 19
E) 20

EJEMPLO PSU-30. Sea **n** un número entero, ¿cuál de las afirmaciones siguientes es (son) siempre verdadera(s)?

I) $\frac{n+3}{n-2}$ es racional

II) $\frac{n+3}{n-2}$ es una fracción impropia

III) $\frac{n+3}{n-2} = -\frac{1}{2}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) Ninguna de las anteriores.

EJEMPLO PSU-31. Se define la operación $[m, n, r] = \frac{2m-8n}{2r}$, ¿cuál es el valor de $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}\right]$?

A) $-\frac{3}{2}$

B) $-\frac{2}{3}$

C) $-\frac{24}{5}$

D) $-\frac{6}{5}$

E) -1

EJEMPLO PSU-32. $\frac{n-(n-(-n))}{n} = ?$

A) $-2n$
B) $-n$
C) n
D) 1
E) -1

EJEMPLO PSU-33. ¿Cuántos séptimos son equivalentes a $2\frac{5}{7}$?

A) 19
B) 17
C) 14
D) 10
E) 5

EJEMPLO PSU-34. El número racional $\frac{10}{7}$ es igual a:

A) $10 \bullet 0{,}7$

B) $0{,}10 + 0{,}7$

C) $\frac{7}{3} + \frac{3}{4}$

D) $7 + \frac{3}{7}$

E) $\frac{1}{7} : \frac{1}{10}$

EJEMPLO PSU-35. Juan tiene **a** dulces y su hermano tiene la mitad de esta cantidad más un dulce. Si al hermano de Juan le regalan 3 dulces y éste, a su vez, regala 2 dulces, ¿con cuántos dulces queda el hermano de Juan?

A) Con $\frac{a}{2} + 1$

B) Con $a + 2$

C) Con $\frac{a}{2} + 3$

D) Con $\frac{a}{2} + 4$

E) Con $\frac{a}{2} + 2$

EJEMPLO PSU-36. Dada la fracción $\frac{m+t}{mn}$, con m > 0 y t > 0. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) Si a **m** y a **t** se le agrega 1, entonces la fracción aumenta en 2.
II) Si el numerador de la fracción se duplica y su denominador se divide por 2, entonces la fracción queda igual.
III) Si el denominador de la fracción se divide por 3, entonces la fracción se triplica.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Solo II y III

EJEMPLO PSU-37. Se define la operación $a\#b = a \bullet b$ en los números reales. ¿En cuál(es) de las siguientes operaciones el resultado es igual a 8?

I) 4 # 2
II) 16 # $\frac{1}{2}$
III) 8 # 0

A) Solo en III
B) Solo en I y en II
C) Solo en I y en III
D) Solo en II y en III
E) En I, en II y en III